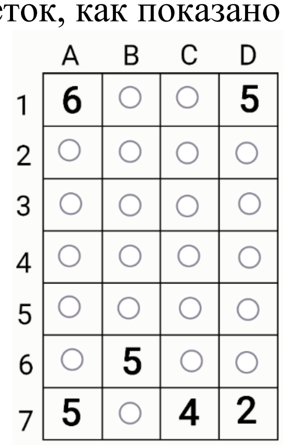
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2023–2024 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 5 КЛАСС

ЗАДАНИЯ, ОТВЕТЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

1. На большой ферме живут 630 кроликов. В один из дней фермер покормил их из расчёта 3 килограмма моркови на 70 кроликов, а надо было — 7 килограммов моркови на 90 кроликов. Сколько ещё моркови понадобится, чтобы правильно накормить кроликов? Ответ выразите в килограммах.
Ответ: 22.

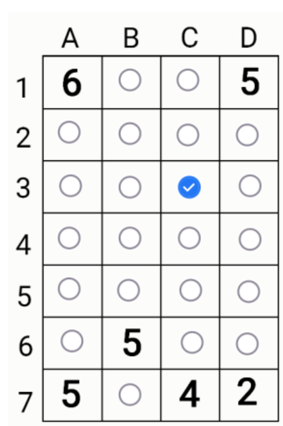
Решение. Первоначально фермер потратил $(630 : 70) \cdot 3 = 27$ килограммов моркови, а должен был потратить $(630 : 90) \cdot 7 = 49$ килограммов моркови. Таким образом, ему понадобится ещё $49 - 27 = 22$ килограмма моркови.

2. Лёня разрезал по линиям сетки прямоугольник 7×4 на семь прямоугольников площадью 6, 5, 5, 5, 4, 2, 1. Площадь каждого из первых шести прямоугольников Лёня написал в одной из его клеток, как показано на рисунке.

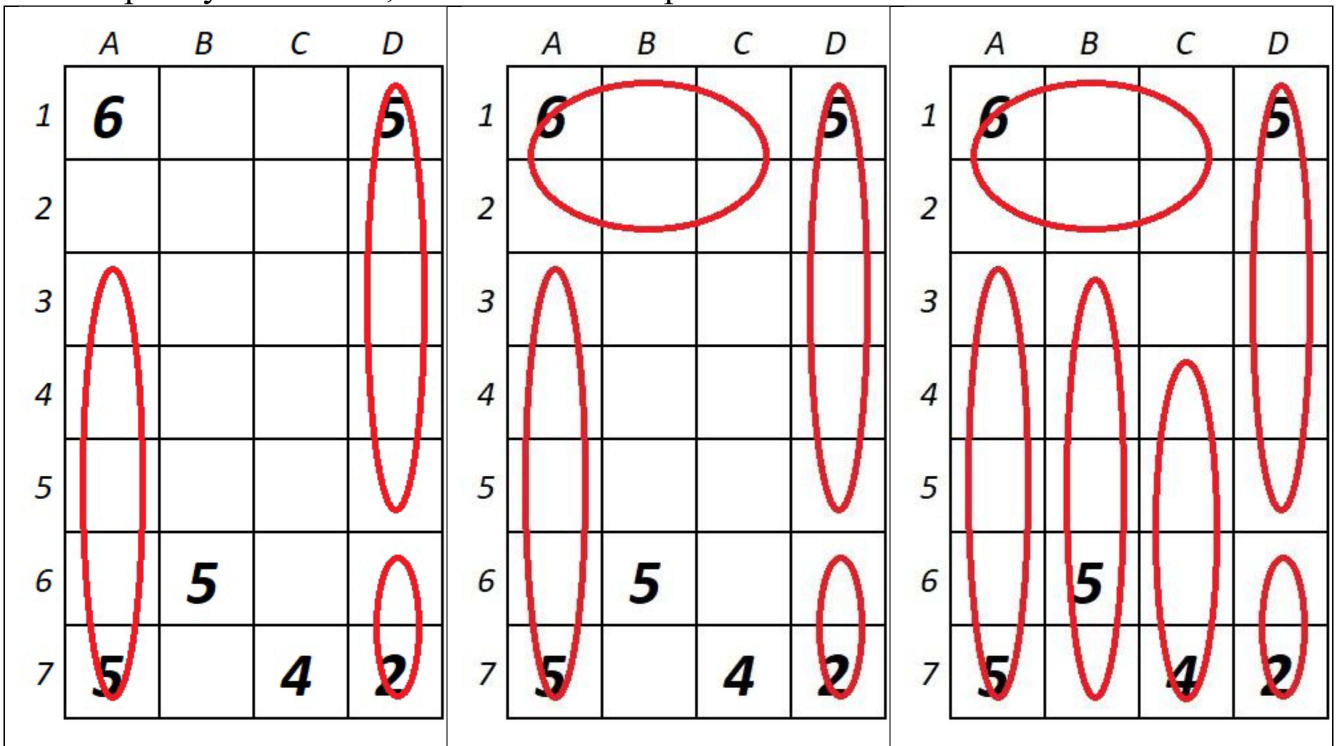


Какой клетке соответствует прямоугольник площади 1?

Ответ:



Решение. В первую очередь обратим внимание на две цифры 5 в противоположных углах прямоугольника, а также на цифру 2. Они однозначно задают расположение своих прямоугольников, как показано на рис 1a.



(a) (b) (c)

Теперь можно определить расположение прямоугольника, состоящего из 6 клеток (рис. 1b).
Расположение двух оставшихся прямоугольников с подписанными клетками после этого определяется однозначно, как показано на рис. 1c.

Таким образом, мы получаем, что квадрат 1×1 расположен в клетке $C3$.

3. Учитель выписал на доску несколько подряд идущих натуральных чисел, начиная с единицы. Петя заметил, что ровно 17 из них делятся на 3, а Вася заметил, что ровно 3 из них делятся на 13. Сколько чисел выписал на доску учитель?
Ответ: 51.

Решение. Поскольку ровно 17 чисел делятся на 3, то на доску точно были выписаны числа 3, 6, 9, ... , 51 и не было выписано число 54.

Также на доске были ровно 3 числа, делящиеся на 13. Значит, там точно были выписаны числа 13, 26, 39 и не было выписано число 52.
Следовательно, учитель выписал на доску все натуральные числа от 1 до 51 — ровно 51 число.

4. У Ильи есть 16 фигурок солдатиков: лучников и мечников. Если он отдаст брату любые 3 фигурки, то мечников у него останется в любом случае больше, чем лучников. Если же он отдаст брату половину мечников, то лучников у него останется больше, чем мечников. Сколько фигурок лучников у Ильи?
Ответ: 6.

Решение. Нам известно, что если Илья отдаст брату любые 3 фигурки, то мечников у него останется в любом случае больше, чем лучников. Отсюда получается, что у Ильи мечников хотя бы на 4 больше, чем лучников. Поскольку всего фигурок 16, то под это условие подходят лишь следующие варианты:

- 16 мечников и 0 лучников,
- 15 мечников и 1 лучник,
- 14 мечников и 2 лучника,
- 13 мечников и 3 лучника,
- 12 мечников и 4 лучника,
- 11 мечников и 5 лучников,
- 10 мечников и 6 лучников.

Теперь воспользуемся другим условием: «Если же он отдаст брату половину мечников, то лучников у него останется больше, чем мечников». Очевидно, что из перечисленных вариантов под это условие подходит только последний: 10 мечников и 6 лучников.

5. Найдите наибольшее восьмизначное число, удовлетворяющее двум условиям:

- У него любые три подряд идущие цифры различны;
- У него произведение любых трёх подряд идущих цифр делится на 20.

Ответ: 98598598

Решение. Чем больше первая цифра числа, тем больше само число, поэтому пусть наше число начинается с цифры 9:

$$9\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Первые три цифры должны быть различны, поэтому максимальное значение, которое может принимать вторая цифра, — это 8.

$$9\;8\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Теперь поймём, какое значение в этом случае может принимать третья цифра числа. Чтобы произведение первых трёх цифр делилось на 20, необходимо поставить на третье место либо 0 (тогда $9 \cdot 8 \cdot 0 = 0$, что делится на 20), либо 5 (тогда $9 \cdot 8 \cdot 5 = 360$, что делится на 20). Во втором случае число получится больше.

$$9\;8\;5\,.\,.\,.\,.\,.$$

Теперь рассмотрим следующую тройку: четвёртую, пятую и шестую цифры. Для них можно повторить точно такое же рассуждение.

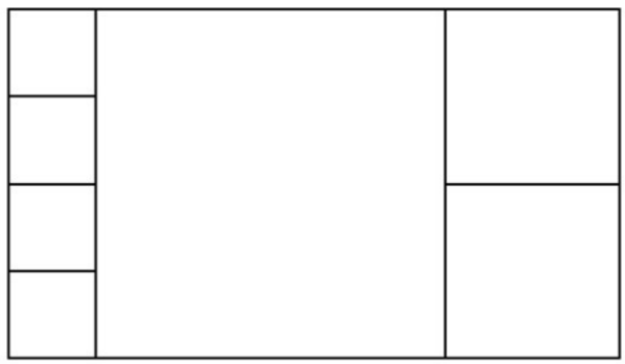
9 8 5 9 8 5 . .

И для последних двух цифр тоже.

9 8 5 9 8 5 9 8

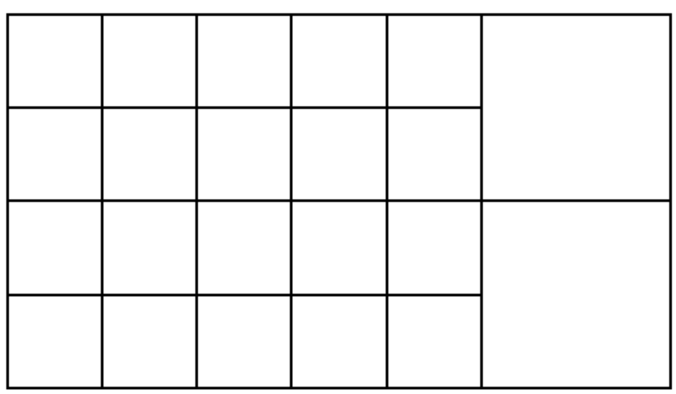
Заметим, что у получившегося числа любые три подряд идущие цифры — это 5, 8 и 9 в каком-то порядке. Они различны, и их произведение делится на 20, поэтому полученное число удовлетворяет условию задачи.

6. На рисунке изображён прямоугольник, разрезанный на семь квадратов.

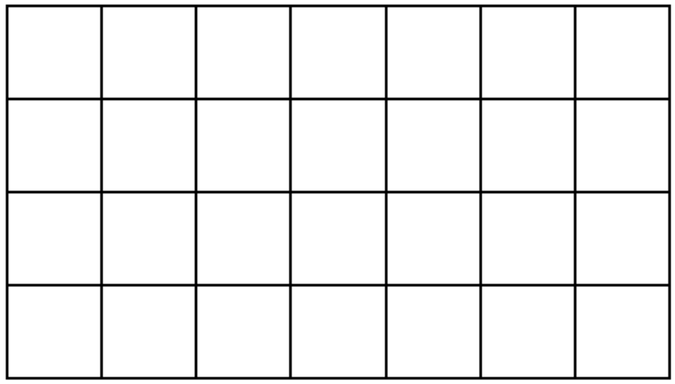


Найдите периметр этого прямоугольника, если его площадь равна 2268.
Ответ: 198.

Решение. Заметим, что сторона большого квадрата в 4 раза больше стороны маленького квадрата, поэтому большой квадрат можно разрезать на 16 маленьких квадратов.



Теперь видно, что сторона среднего квадрата в 2 раза больше стороны маленького квадрата, поэтому каждый из средних квадратов можно разрезать на 4 маленьких квадрата.



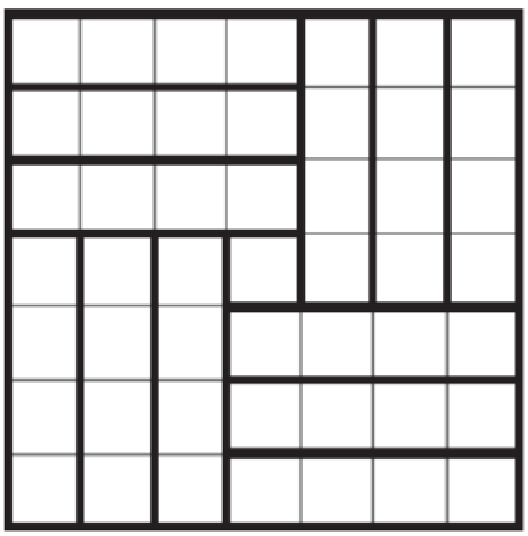
Пусть x — площадь маленького квадрата. Тогда площадь всего прямоугольника равна $28x$, а по условию задачи она равна 2268. Получается уравнение

$$28x = 2268,$$
$$x = 81.$$

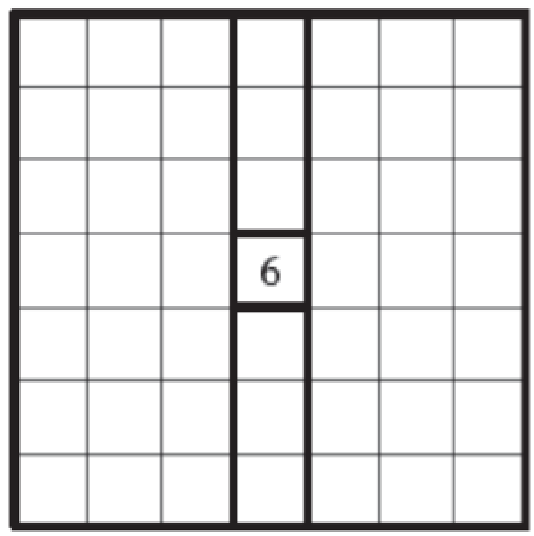
Отсюда можно понять, что маленький квадрат имеет размеры 9×9. Периметр всего прямоугольника равен $2 \cdot (4x + 7x) = 22x$, и он в 22 раза больше стороны маленького квадрата. Значит, ответом к задаче является число $22 \cdot 9 = 198$.

7. У Вани есть 234 монеты и доска 7×7. Он разложил все монеты в клетки доски так, что в любых четырёх клетках, образующих прямоугольник 1×4 или 4×1, суммарно оказалось ровно 19 монет (в каких-то клетках могло оказаться несколько монет, а какие-то клетки могли оказаться пустыми).
Сколько всего монет может находиться в четвёртом столбце? Укажите все возможные варианты.
Ответ: 32.

Решение. Разобьём наш квадрат на 12 прямоугольников 1×4 и 1 квадратик 1×1, как показано на рис. 2a. Из условия задачи следует, что суммарное количество монет во всех



(a)



(b)

12 прямоугольниках равно $12 \cdot 19 = 228$. Поскольку всего монет 234, то в центральном квадратике 1×1 лежат ровно $234 - 228 = 6$ монет.

Теперь рассмотрим два прямоугольника 1×4 в четвёртом столбце: образованный верхними 4 клетками и образованный нижними 4 клетками (рис. 2b). Чтобы найти количество монет в четвёртом столбце, мы сложим количества монет в этих двух прямоугольниках:
$19 + 19 = 38$ монет. Но при этом монеты в центральном квадратике посчитаны дважды, поэтому их количество надо вычесть: $38 - 6 = 32$ монеты.

8. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собрались на заседание 50 жителей острова, среди которых было k лжецов ($k \geq 4$). Все лжецы по очереди сделали заявления:

- Первый лжец: «Среди нас рыцарей меньше, чем лжецов»,
- Второй лжец: «Среди нас рыцарей столько же, сколько лжецов»,
- Третий лжец: «Среди нас рыцарей на 1 больше, чем лжецов»,
- Четвёртый лжец: «Среди нас рыцарей на 2 больше, чем лжецов»,
- ...
- k-й лжец: «Среди нас рыцарей на (k – 2) больше, чем лжецов».

Найдите наибольшее возможное значение k.

Ответ: 17.

Решение. Так как все лжецы соврали, то рыцарей должно быть хотя бы на $k-1$ больше, чем лжецов. Раз лжецов ровно k, то рыцарей хотя бы $2k-1$, а на заседание собрались хотя бы $3k-1$ жителей острова. Но условию задачи нам известно, что на заседании было ровно 50 человек. Получаем неравенство

$$3k-1 \leqslant 50 \Rightarrow 3k \leqslant 51 \Rightarrow k \leqslant 17.$$

Осталось лишь понять, что случай с 17 лжецами и 33 рыцарями удовлетворяет условию задачи. Действительно, в этом случае рыцарей на 16 больше, чем лжецов, поэтому все 17 лжецов действительно солгали.